Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria 2013
Soluciones

1. Problemas

1. **(3 puntos)** Una ciudad X tiene 2013 personas. Cuando se ordena a las personas de manera creciente por la cantidad de dinero que tienen, la $n-$ésima persona tiene n veces la cantidad de dinero que tiene la más pobre. En cierto momento específico, todos los ciudadanos de X deciden hacer lo siguiente: cada quien reparte equitativamente la mayor parte posible de su riqueza entre todos los ciudadanos de X y da lo que sobre a la ciudad vecina Y.

   Sabemos que a la cantidad de dinero de la persona más pobre de X ni 3, ni 11, ni 61 la dividen. Determina la cantidad de dinero total que se dio a la ciudad Y.

2. **(4 puntos)** Sea V un espacio vectorial de dimensión infinita con producto interior y $S \subseteq V$ un subespacio no trivial de dimension infinita. Sea $x \in V \setminus S$ y W el espacio generado por x. Determina la dimensión de $(S \oplus W) \cap S^{\perp}$.

3. **(4 puntos)** Consideremos el número

$$\alpha = 0{,}123456789101112\ldots$$

   formado por escribir uno tras otro todos los enteros positivos después del punto decimal.

   Muestra que para todo entero positivo k tenemos que el conjunto

$$A_k := \{10^{nk}\alpha - \left\lfloor 10^{nk}\alpha \right\rfloor : n \in \mathbb{N}\}$$

   es denso en $[0, 1]$.

   Nota: $\lfloor x \rfloor$ denota al mayor entero menor o igual que x. En algunos países, en lugar de "punto decimal" se utiliza "coma decimal".

4. **(5 puntos)** Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia con centro O_1 y radio R, y circunscrito en otra circunferencia con centro O_2 y radio r. Muestra que

$$(O_1O_2)^2 = R^2 - 2rR + r(2r - r_1 - r_2)$$

   donde r_1 y r_2 son los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos ABC y ADC, respectivamente.

5. **(5 puntos)** Los elementos de un grupo finito conmutativo G con $|G| = N$ se colorean con tres colores, amarillo, azul y rojo, tal que cada color se utiliza a lo más $N/2$ veces.

   Sea A el conjunto de todas las 4-tuplas (ordenadas) $(x, y, z, w) \in G^4$, tales que $xyzw = e$ y x, y, z, w tienen el mismo color. Análogamente, sea B el conjunto de todas las 4-tuplas (ordenadas) $(x, y, z, w) \in G^4$ tales que $xyzw = e$, los elementos x, y tienen el mismo color, y z y w también tienen el mismo color, pero los dos colores son distintos. Demuestra que $|A| \leq |B|$.

6. **(6 puntos)** Una función real $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es acotada y diferenciable. Además, satisface la relación

$$f(x)f'(x) \geq \sin(x).$$

   ¿Existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$?

7. **(8 puntos)** Antonio y Bella juegan el siguiente juego: Antonio escoge un entero positivo k y después Bella un segundo entero positivo n. Empezando por Antonio, ellos colocan alternadamente puntos en el plano (cada uno diferente a todos los anteriores) hasta que cada uno haya puesto n puntos. Bella gana si el número de rectas que pasan por al menos dos puntos de los colocados es divisible por k. En caso contrario gana Antonio. ¿Qué jugador tiene estrategia ganadora?

2. Soluciones y criterios

1. Supongamos que la persona más pobre de X tiene a en cantidad de dinero. Entonces en orden creciente, la cantidad de dinero de las personas de X es: $a, 2a, 3a \ldots, 2013a$.

   Como a y 2013 no comparten factores en común (ya que los divisores primos de 2013 son 3, 11 y 61), entonces $\{a, 2a, 3a, \ldots, 2013a\}$ es un sistema completo de resíduos módulo 2013, y justamente lo que dona cada persona a la ciudad Y es el resíduo al dividir entre 2013.

   De esta forma, lo que se dona a la ciudad Y es $0 + 1 + 2 + \ldots + 2012 = \frac{2012 \cdot 2013}{2}$ □

2. Vamos a demostrar que la dimensión de $(S \oplus W) \cap S^{\perp}$ es 1 o 0.

   Para ver esto recordemos que por ser V de dimensión infinita no necesariamente se tiene que $V = S \oplus S^{\perp}$. Por lo tanto tenemos dos casos

   Caso 1 Si $x \notin S \oplus S^{\perp}$. Demostraremos que en este caso $dim(S \oplus W) \cap S^{\perp} = 0$. Sea $y \in (S \oplus W) \cap S^{\perp}$, entonces podemos escribir $y = s + \alpha x$ con $s \in S$ y α un escalar y $y = s^{\perp} \in S^{\perp}$.

   Ahora $0 = y - y = s + \alpha x - s^{\perp}$. y de aquí podemos concluir que $\alpha x = s^{\perp} - s$. Si $\alpha \neq 0$ tendríamos que $x = \frac{s^{\perp}}{\alpha} - \frac{s}{\alpha} \in S \oplus S^{\perp}$ que es una contradicción. Por lo tanto $\alpha = 0$ y de ahí que $y = s = s^{\perp} \in S \cap S^{\perp} = \{0\}$. De aquí se sigue que $dim(S \oplus W) \cap S^{\perp} = 0$.

   Caso 2 $x \in S \oplus S^{\perp}$.

   Escribimos primero $x = s + s^{\perp}$ con $s \in S$ y $s^{\perp} \in S^{\perp}$. Notemos primero que como $x \in V \setminus S$ entonces $s^{\perp} \neq 0$. Sea $y \in (S \oplus W) \cap S^{\perp}$ escribimos a y como $y = s_1 + \alpha x$ y $y = s_2$ donde $s_1 \in S$, $s_2 \in S^{\perp}$ y α es un escalar.

   Entonces tenemos que $y = s_1 + \alpha s + \alpha s^{\perp} \in S \oplus S^{\perp}$. Como $y \in S^{\perp}$ debemos tener que $y = \alpha s^{\perp}$. De aquí concluimos que $(S \oplus W) \cap S^{\perp} \subset span\{s^{\perp}\}$.

   Por otro lado $s^{\perp} = x - s \in W \oplus S$ y por la elección de $s^{\perp}$ tenemos que $s^{\perp} \in (S \oplus W) \cap S^{\perp}$. De donde concluimos que $(S \oplus W) \cap S^{\perp} = span\{s^{\perp}\}$ y por tanto este subespacio tiene dimensión 1.

   □

3. Para mostrar que A_k es denso, basta tomar un real arbitrario $r \in [0, 1]$ y mostrar que podemos acercarnos tanto como querramos a él con números de A_k. Tomemos entonces $\epsilon > 0$, $r \in [0, 1]$ y escribamos r en expansión decimal:

$$r = \sum_{j=1}^{\infty} d_j 10^j$$

Tomemos un entero N tal que $\frac{1}{10^N} < \epsilon$. Encontraremos un número a en A_k que coincide con r en sus primeros N dígitos decimales, y por lo tanto tendremos $|a - r| < \frac{1}{10^N} < \epsilon$, logrando lo que queremos.

Consideremos un entero b tal que $10^b > k$, $N + b > k$ y $(N + b, k) = 1$. Tomemos el entero en base 10 $M = \overline{d_1 d_2 \ldots d_N 000 \ldots 0}$ con b ceros. Este entero aparece en la expansión decimal de α pues ahí aparecen todos los enteros positivos. Supongamos que empieza justo en el dígito en el lugar m. Entonces tenemos que en los dígitos de lugares $m + N + b$, $m + 2(N + b)$, ..., $m + (k - 1)(N + b)$ comienzan los enteros $M + 1$, $M + 2$, ..., $M + (k - 1)$.

Como $10^b > k$, entonces todos estos números M, $M+1$, $M+2$, ..., $M+(k-1)$ empiezan con los mismos N dígitos. Como $(N+b, k) = 1$, entonces $\{m, m+N+b, m+2(N+b), m+3(N+b), \ldots, m+(k-1)(N+b)\}$ forma un sistema completo de residuos módulo k. Entonces alguno de los bloques de tamaño k comienza en donde comienza alguno de los números M, $M + 1$, $M + 2$, ..., $M + (k - 1)$. Si es el n_0-ésimo bloque, entonces al tomar $a = 10^{n_0 k}\alpha - \lfloor 10^{n_0 k} \rfloor$ obtenemos el número en A_k buscado. $\square$

Nota: El problema básicamente consiste en lo siguiente

a) Darse cuenta que A_k consiste de los números obtenidos de α eliminando $k-$bloques (bloques de tamaño k) en su expansión decimal.

b) Mostrar que tras eliminaciones de $k-$bloques se puede encontrar cualquier cadena inicial de dígitos en α.

4. Denotemos por I_1 e I_2 a los incentros de los triángulos ABC y ADC, respectivamente. Denotemos por d a la distancia O_1O_2. Dado que O_2 es el centro del círculo inscrito a $ABCD$ entonces B, I_1 y O_2 son colineales. Prolonguemos BI_1 hasta que corte de nuevo el circuncírculo en P. Si bajamos una perpendicular al lado AB desde los puntos I_1 y O_2 que lo corte en Q_1 y Q_2, respectivamente, entonces es claro que los triángulos BI_1Q_1 y BO_2Q_2 son semejantes y además son semejantes a $P'PA$ en donde P' es el otro punto distinto a P sobre el circuncírculo de la recta O_1P. De donde,

$$\frac{BO_2}{r} = \frac{BI_1}{r_1} = \frac{2R}{AP} = \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}}.$$

Es conocido que $AP = I_1P$ (por ejemplo, mirando los ángulos del triángulo API_1). De donde la potencia $d^2 - R^2$ de O_2 con respecto al circuncírculo es

$$d^2 - R^2 = (O_1O_2)^2 - R^2 = BO_2 \cdot O_2P = \frac{2R}{AP} \cdot r \cdot O_2P = \frac{2R}{AP} \cdot r \cdot (I_1P - I_1O_2).$$

Pero $I_1O_2 = BO_2 - BI_1 = BO_2 - r_1 \cdot \frac{BO_2}{r} = BO_2(1 - \frac{r_1}{r})$. Es decir, $d^2 = R^2 - 2rR - \frac{r(r-r_1)}{\operatorname{sen}^2\frac{B}{2}}$. Análogamente, $d^2 = R^2 - 2rR - \frac{r(r-r_2)}{\operatorname{sen}^2\frac{D}{2}}$. Como $ABCD$ es concíclico entonces $B + D = 180°$, de donde $\operatorname{sen}\frac{D}{2} = \cos\frac{B}{2}$. Por lo tanto, $t = \frac{r(r-r_2)}{\cos^2\frac{B}{2}} = \frac{r(r-r_1)}{\operatorname{sen}^2\frac{B}{2}}$. Ahora, $2r - r_1 - r_2 = (r - r_1) + (r - r_2) = t(\operatorname{sen}^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{B}{2}) = t$. Por ende,

$$d^2 = R^2 - 2rR - \frac{r(r - r_1)}{\operatorname{sen}^2\frac{B}{2}} = R^2 - 2rR - rt = R^2 - 2rR - r(2r - r_1 - r_2).$$

$\square$

5. Sean P, Q y R los conjuntos de elementos amarillos, azules y rojos, respectivamente, $|P| = p$, $|Q| = q$, y $|R| = r$ de donde $p + q + r = N$ y $p, q, r \leq N/2$.

   Para conjuntos $X, Y, Z, W \subset G$ cualesquiera sea

$$M_{XYZW} = \{(x, y, z, w) \in X \times Y \times Z \times W \colon xyzw = e\}.$$

   Lema Para conjuntos $X, Y, Z \subset G$ cualesquiera tenemos que

$$|M_{XYZP}| + |M_{XYZQ}| + |M_{XYZR}| = |M_{XYZG}| = |X| \cdot |Y| \cdot |Z|.$$

   Demostración La primera igualdad es trivial. La segunda se sigue del hecho que para todo $x \in X$, $y \in Y$ y $z \in Z$ existe un único elemento $w \in G$ con la propiedad $xyzw = e$. $\square$

   Aplicando el lema varias veces,

$$\begin{aligned}
-|A| + |B| &= -(|M_{PPPP}| + |M_{QQQQ}| + |M_{RRRR|}) \\
&\quad + (|M_{PPQQ}| + |M_{PPRR}| + |M_{QQPP}| + M_{QQRR}| + |M_{QQPP}| + |M_{QQRR}|) \\
&= -(p^3 - |M_{PPPQ}| - |M_{PPPR}|) - (q^3 - |M_{QQQP}| - |M_{QQQR}|) - (r^3 - |M_{RRRP}| - |M_{RRRQ}|) \\
&\quad + (p^2q - |M_{PPQP}| - |M_{PPQR}|) + (p^2r - |M_{PPRP}| - |M_{PPRQ}|) + (q^2p - |M_{QQPQ}| - |M_{QQPR}|) \\
&\quad + (q^2r - |M_{QQRP}| - |M_{QQRQ}|) + (r^2p - |M_{RRPQ}| - |M_{RRPR}|) + (r^2q - |M_{RRQP}| - |M_{RRQR}|) \\
&= -p^3 - q^3 - r^3 + p^2q + p^2r + q^2p + q^2r + r^2p + r^2q - 2(|M_{PQRP}| + |M_{PQRQ}| + |M_{PQRR}|) \\
&= -p^3 - q^3 - r^3 + p^2q + p^2r + q^2p + q^2r + r^2p + r^2q - 2(|M_{PQRP}| + |M_{PQRQ}| + |M_{PQRR}|) \\
&= -p^3 - q^3 - r^3 + p^2q + p^2r + q^2p + q^2r + r^2p + r^2q - 2pqr \\
&= (-p + q + r)(p - q + r)(p + q - r) = (N - 2p)(N - 2q)(N - 2r) \geq 0.
\end{aligned}$$

$\square$

6. Consideremos la función auxiliar

$$F(x) = f^2(x) + 2\cos x,$$

   definida sobre $[0, \infty)$. Entonces se cumple

$$|F(x)| \leq |f^2(x)| + 2|\cos x| \leq M^2 + 2$$

   y

$$F'(x) = 2f(x)f'(x) - 2\sin x \geq 0,$$

   de modo que F es creciente y acotada superiormente. Consideremos la siguiente sucesión:

$$\{x_n\} = \{2\pi, 2\pi + \frac{\pi}{2}, 4\pi, 4\pi + \frac{\pi}{2}, 6\pi, 6\pi + \frac{\pi}{2}, \ldots\}.$$

Tenemos que $x_n > 0$, que $\{x_n\}$ es creciente y que $x_n \to \infty$.

Consideremos ahora la sucesión $u_n = F(x_n)$. Tenemos que $\{u_n\}$ es creciente y acotada superiormente, de modo que existe el límite $L = \lim_{n\to\infty} u_n$. Supongamos ahora que existe $N = \lim_{x\to\infty} f(x)$. Como f es contínua, entonces $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ también existe y es N. De esta forma, tendríamos que existe:

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) - f^2(x_n) = L - N^2.$$

Pero esto es decir que $\lim_{n\to\infty} \cos x_n$ existe, lo cual es absurdo pues $\{\cos x_n\} = \{1, 0, 1, 0, \ldots\}$ no tiene límite. Con esto queda probado que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ no existe. $\square$

7. Bella tiene una estrategia ganadora. Dada una configuración de puntos, se llamará a una recta *d-buena* si contiene exactamente d puntos de la configuración. Comenzaremos probando el siguiente lema:
Lema:
Para cada par de enteros $d, m > 0$ existe un conjunto de d^m puntos $P(d,m) \subset \mathbb{R}^2$ y un conjunto $\mathcal{S}$ de rectas d-buenas para $P(d,m)$ con las siguientes propiedades:

   a) $\mathcal{S}$ tiene por lo menos md^{m-1} elementos.
   b) Si tres rectas de $\mathcal{S}$ son concurrentes, entonces este punto de intersección está en $P(d,m)$.

Demostración 1:
Consideremos el conjunto $P'(d,m) = \{\sum_{i=1}^m \lambda_i e_i \mid \lambda_i \in \{0, 1, \ldots, d-1\}\} \subset \mathbb{R}^m$ (en donde los e_i forman alguna base de $\mathbb{R}^m$). Sea $\mathcal{S}'$ el conjunto de todas las rectas paralelas a e_i para algún $i = 1, \ldots, d-1$ que pasan por por lo menos un punto en $P'(d,m)$. Entonces $P'(d,m)$ junto con el conjunto $\mathcal{S}'$ cumplen todas las propiedades de $P(d,m)$ excepto por estar contenido en un plano 2-dimensional. Pero todas las propiedades se conservan por proyección a algún plano 2-dimensional si la misma cumple lo siguiente:

   i) Ningún par de puntos de $P'(d,m)$ tienen la misma imagen.
   ii) La proyección de una recta d-buena en $\mathcal{S}'$ es también d-buena, es decir, si $p \in P'(d,m)$ y $\ell \in \mathcal{S}'$ son tales que la proyección de p está sobre la proyección de ℓ, entonces debe ser que ya se tiene que $p \in \ell$.
   iii) Tres rectas de $\mathcal{S}'$ que no concurren en $P'(d,m)$ (y por lo tanto no concurren en ningún lado), tampoco concurren despues de la proyección.

Demostraremos que la proyección genérica tiene estas propiedades. Primero notemos que el Grasmaniano $Gr(k,2)$ es una variedad irreducible sobre $\mathbb{R}$ (más precisamente: los puntos $\mathbb{R}$-valuados de $Gr(k,2)$ junto con la topología inducida definen un espacio topológico irreducible). Entonces las proyecciones que no cumplen *i)* definen una subvariedad cerrada de $Gr(k,2)$. Claramente lo mismo pasa con las propiedades *ii)* y *iii)* si uno fija las rectas d-buenas y los puntos de $P'(d,m)$. Como para cada una de las condiciones *i)* a *iii)* existe una proyección que la cumple, las proyecciones prohibidas forman una union finita de subvariedades cerradas de $Gr(k,2)$, cada una menor que $Gr(k,2)$. Entonces por la irreducibilidad de $Gr(k,2)$ no la pueden cubrir enteramente.
Demostración 2:
Daremos una descripción explícita de la imagen del conjunto $P'(d,m)$ construida en la demostración 1 bajo una proyección especial y mostraremos que cumple las propiedades.
Escogemos $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ de tal forma que los elementos $\{a_i \mid i = 1, \ldots, m\} \cup \{a_i a_j \mid i, j = 1, \ldots, m\}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$ (e.g. $a_i = \pi^{2^i - 1}$). Consideremos el conjunto

$$P(d,m) = \{\textstyle\sum_{i=1}^m \lambda_i (1, a_i) \mid \lambda_i \in \{0, 1, 2, \ldots, d-1\}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

$P(d,m)$ contiene d^m puntos. Definamos $\mathcal{S}$ como el conjunto de todas las rectas $\mathbb{R}(1,a_j)+\sum_{i\neq j}\varepsilon_i(1,a_i)$ con $j\in\{1,\ldots,m\}$, $\varepsilon_i\in\{0,1,2,\ldots,d-1\}$. Entonces $\mathcal{S}$ contiene md^{m-1} elementos y cada uno de ellos es una recta d-buena porque los a_i son $\mathbb{Q}$-linealmente independientes.
Asumamos ahora que tres rectas buenas de $\mathcal{S}$, digamos $\mathbb{R}(1,a_{j_r})+\sum_{i\neq j_r}\varepsilon_{i,r}(1,a_i)$ $(r=1,2,3)$, concurren. Entonces los a_{j_r} son distintos. Intersectando las primeras dos rectas obtenemos (para algunos $\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} & \mu_1(1,a_{j_1})+\sum_{i\neq j_1}\varepsilon_{i,1}(1,a_i)=\mu_2(1,a_{j_2})+\sum_{i\neq j_2}\varepsilon_{i,1}(1,a_i)\\ \implies \quad & \mu_1=\frac{1}{a_{j_1}-a_{j_2}}\sum_i(\varepsilon_{i,2}-\varepsilon_{i,1})(a_i-a_{j_2})\end{aligned}$$

en donde $\varepsilon_{j_r,r}=0$ para $r=1,2,3$. Análogamente, utilizando la primera y tercera recta:

$$\mu_1=\frac{1}{a_{j_1}-a_{j_3}}\sum_i(\varepsilon_{i,3}-\varepsilon_{i,1})(a_i-a_{j_3}).$$

Por lo tanto, podemos escribir $(a_{j_1}-a_{j_2})(a_{j_1}-a_{j_3})\mu_1$ de dos maneras como una combinación $\mathbb{Z}$-lineal en términos de a_ia_j. Comparando los coeficientes de $a_ia_{j_3}$, respectivamente, $a_ia_{j_2}$ obtenemos

$$\varepsilon_{i,2}-\varepsilon_{i,1}=0 \quad \text{para } i\neq j_1,j_2$$

$$\varepsilon_{i,3}-\varepsilon_{i,1}=0 \quad \text{para } i\neq j_1,j_3$$

y además $\varepsilon_{j_1,3}=\varepsilon_{j_1,2}$. Luego todas las tres rectas se pueden escribir como

$$\mathbb{R}(1,a_{j_r})+\sum_i\varepsilon_i(1,a_i)$$

para los ε_i fijos independientes de r. Pero tales rectas se intersectan exactamente en $\sum_i\varepsilon_i(1,a_i)$, que está contenido en $P(d,m)$.
Solución del problema:
Una vez Antonio ha fijado k, Bella le responde con $n=k(k+1)^{(k+1)^4}+1$. Definamos

$$m_d=\left\lfloor\frac{(k+1)^4\ln(k+1)}{\ln d}\right\rfloor \qquad \text{para } d=2,3,\ldots,k,k+1$$

Bella ignora las movidas de Antonio completamente y posiciona sus puntos de tal manera que ella obtenga un $P(d,m_d)$ (junto con un conjunto $\mathcal{S}_d$ de rectas d-buenas) para cada $d=2,\ldots,k+1$. Estos $P(d,m_d)$ tienen que cumplir la propiedad de que ninguna recta en $\mathcal{S}_d$ (para algún d) contenga un punto adentro de $\bigcup_{i\neq d}P(i,m_i)$. Pero esto se puede hacer porque

$$\sum_{d=2}^{k+1}|P(d,m_d)|=\sum_{d=2}^{k+1}d^{m_d}\le\sum_{d=2}^{k+1}d^{\frac{(k+1)^4\ln(k+1)}{\ln d}}=\sum_{d=2}^{k+1}(k+1)^{(k+1)^4}\le k(k+1)^{(k+1)^4}=n-1$$

Bella tiene realmente suficientes puntos para construir todos los $P(d,m_d)$.
Una vez hecho Bella posiciona sus puntos en cualquier parte que no sea sobre una recta de $\bigcup_d\mathcal{S}_d$, hasta que haya escogido $n-1$ puntos.
Como en cada $\mathcal{S}_d$ no existen tres rectas que concurran, Antonio sólamente puede destruir a lo más $2n$ de las rectas d-buenas de $\mathcal{S}_d$ con sus n puntos ('destruir' significa posicionar un puntos sobre una recta

d-buena de tal forma que ya no contenga exactamente d puntos). Pero para cada $d = 2, \ldots, k+1$:

$$\begin{aligned}
m_d d^{m_d - 1} - 2n &\geq \left(\frac{(k+1)^4 \ln(k+1)}{\ln d} - 1\right) d^{\frac{(k+1)^4 \ln(k+1)}{\ln d} - 2} - 2(k(k+1)^{(k+1)^4} + 1) \geq \\
&\geq ((k+1)^4 - 1)\frac{(k+1)^{(k+1)^4}}{d^2} - 2k(k+1)^{(k+1)^4} - 2 \geq \\
&\geq ((k+1)^2 - \frac{1}{(k+1)^2} - 2k)(k+1)^{(k+1)^4} - 2 \geq \\
&\geq k^2(k+1)^{(k+1)^4} - 2 \geq 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto, antes de que Bella tenga que posicionar su último punto, existe por lo menos una recta para cada $d = 2, \ldots, k+1$ que contenga exactamente d puntos. Si Bella posiciona un punto sobre un recta que ya contiene $d \geq 2$ puntos, pero que no esté sobre otra recta conteniendo por lo menos 2 puntos, entonces el número de rectas que tengan por lo menos 2 puntos aumenta por $2n - 1 - d$. Por ello Bella puede escoger d de tal forma que el número total de rectas que contengan al menos dos puntos es divisible por k. $\square$