Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria 2014
Soluciones y criterios

Problemas

1. **(3 puntos)** Sean n y k enteros positivos tales que $k \leq n$. ¿De cuántas formas se pueden elegir k intervalos de enteros en el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ de modo que la intersección de cualesquiera dos de ellos sea vacía?

   Nota: Un *intervalo de enteros* es un conjunto de uno o más enteros consecutivos.

2. **(4 puntos)** Sea n un entero positivo y sea C un disco cerrado en $\mathbb{R}^2$ de área mayor que n. Demuestra que existe una traslación de C que contenga por lo menos $n+1$ puntos (a, b) con coordenadas $a, b \in \mathbb{Z}$.

3. **(4 puntos)** Se escriben todas las fracciones $\frac{p}{q}$ con $0 \leq p \leq q$ en una sucesión de la siguiente forma:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots$$

   Alrededor de cada fracción $\frac{p}{q}$ construimos un intervalo abierto de longitud $2^{-(k(p,q)+1)}$ centrado en $\frac{p}{q}$, donde $k(p,q)$ es el puesto que corresponde a la fracción $\frac{p}{q}$ en la sucesión. Muestra que $\frac{1}{\sqrt{2}}$ no pertenece a la unión de los intervalos.

4. **(5 puntos)** Sea n un entero mayor o igual a 3. Tomemos los números complejos $a_k = k + i\sqrt{k^2-1}$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. Sea $p(x)$ el polinomio $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$. Muestra que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{p'(x)}\, dx = 0.$$

   .

5. **(5 puntos)** Muestra que existe una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciable con derivadas continuas en $[0,1]$ tal que para cualquier función $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua en $[0,1]$ y cualquier $\epsilon > 0$ existe un número N y números reales $a_0, a_1, \ldots, a_N$ tales que

$$\int_0^1 \left(g(x) - \sum_{i=0}^{N} a_i f^{(i)}(x) \right)^2 dx < \epsilon.$$

Nota: Aquí $f^{(i)}$ denota la $i-$ésima derivada de f si $i > 0$ y $f^{(0)} = f$.

6. **(6 puntos)** Sean a, b, c números reales positivos distintos. Definimos $L(a, b, c)$ como

$$\frac{2a}{(\log a - \log b)(\log a - \log c)} + \frac{2b}{(\log b - \log c)(\log b - \log a)} + \frac{2c}{(\log c - \log a)(\log c - \log b)}.$$

Prueba que

$$\sqrt[3]{abc} \leq L(a, b, c) \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

Nota: A $L(a, b, c)$ se le conoce como la *media logarítmica* de los números a, b, c.

7. **(7 puntos)** Sea q una potencia de un primo impar p. Sea $\mathbb{F}_q$ el campo finito de orden q y $GL_2(q)$ el conjunto de matrices invertibles de 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_q$. Si $M \in GL_2(q)$, entonces definimos el *orden* de M como el menor entero positivo k tal que $M^k = I$, la matriz identidad. Prueba que

   a) Si $\det(M) = 1$, entonces el orden de M divide a $q - 1$, a $q + 1$ o a $2p$.

   b) Si t es un entero positivo que divide a $q - 1$, a $q + 1$ o a $2p$, entonces existe $M \in GL_2(q)$ tal que $\det(M) = 1$ y el orden de M es t.

Soluciones y criterios

1. **Solución**

La respuesta es $\binom{n+k}{2k}$. Analicemos el siguiente problema alternativo. Consideremos $n + k$ espacios ordenados de izquierda a derecha. De ellos elijamos $2k$ y pongamos una X. Claramente esto se puede hacer de $\binom{n+k}{2k}$ formas. Ahora vamos a dar una biyección entre este problema y el problema de los intervalos.

Tomamos un acomodo de intervalos y lo ordenamos como $\{[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_k, b_k]\}$. Como los intervalos son ajenos, los extremos cumplen $a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \ldots < a_k \leq b_k$. A esta colección de intervalos le asignaremos el acomodo de espacios en donde hay X en los lugares a_1, b_1+1, a_2+1, b_2+2, a_3+2, $\ldots$, $a_k+(k-1)$, b_k+k. Debido a las desigualdades de intervalos, tenemos que $1 \leq a_1 < b_1 + 1 < a_2 + 1 < b_2 + 2 < \ldots < a_k + (k-1) < b_k + k \leq n + k$. Esto muestra que en efecto un acomodo de intervalos da un acomodo de X válido.

Inversamente, si tenemos un acomodo de X en los lugares $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_k < b_k$, entonces podemos asignarle la colección de intervalos $\{[a_1, b_1 - 1], [a_2 - 1, b_2 - 2], \ldots, [a_k - (k-1), b_k - k]\}$. Ahora las desigualdades de los lugares de las X muestran que los intervalos son ajenos y que los extremos en efecto están en $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Las operaciones que propusimos son una la inversa de la otra, de modo que esto justifica que existe una biyección entre ambos problemas y por tanto la cantidad de formas de elegir k intervalos disjuntos en $\{1, 2, \ldots, n\}$ es $\binom{n+k}{2k}$.

Criterio de evaluación

- **(1 pt)** Mencionar que se puede de $\binom{n+k}{2k}$ formas.
- **(1 pt)** Proponer una forma de contar válida.
- **(1 pt)** Completar los detalles del conteo

2. **Solución**

   Centremos el disco en el origen. Sea R su radio y S su área. Por hipótesis, $S > n$.

   Consideremos las traslaciones $C + v$ con $v = (x, y) \in \mathbb{Z}^2$, $0 \leq x, y < N$ para N un entero positivo. Estas N^2 traslaciones están contenidas en el cuadrado $[-R, N + R]^2$, el cual tiene área $(N + 2R)^2$. La suma de las áreas de esas traslaciones es SN^2.

   Para N suficientemente grande tenemos que $S\left(1 + \frac{2R}{N}\right)^{-2} > n$ pues $S > n$ y $\left(1 + \frac{2R}{N}\right)^{-2}$ converge a 1. Así, para esta N tenemos $\frac{SN^2}{(N+2R)^2} > n$ y entonces por principio de las casillas existe un punto q del cuadrado que pertenece a por lo menos $n + 1$ traslaciones $C + v_i$, con $v_i \in \mathbb{Z}^2$, $i \in \{1, 2, \ldots, n + 1\}$. De esta forma, existen puntos $p_i \in C$, $i \in \{1, 2, \ldots, n + 1\}$ tales que $q = p_i + v_i$, y así $v_i = p_i - q$. Esto nos dice que la traslación $C - q$ contiene los $n + 1$ puntos v_i. Esto es lo que queremos pues precisamente son $n + 1$ puntos en $\mathbb{Z}^2$.

   Criterio de evaluación

   - **(1 pt)** Considerar traslaciones enteras de C
   - **(2 pt)** Encontrar un punto q cubierto por al menos $n + 1$ traslaciones enteras de C.
   - **(1 pt)** Concluir que la traslación $C - q$ cumple lo requerido.

3. **Solución**

   Una cuenta directa muestra que $k(p, q) = p + \frac{q(q+1)}{2}$.

   Si $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ pertenece a uno de dichos intervalos entonces existen p y q enteros con $0 \leq p \leq q$ y $q \geq 1$ tales que

$$\left|\frac{p}{q} - \eta\right| < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{p+\frac{1}{2}q(q+1)+1}} \leq \frac{1}{2^{\frac{1}{2}q(q+1)+1}}.$$

   Por otro lado, tenemos que $\frac{1}{\sqrt{2}}$ es irracional, de modo que para los enteros p y q tenemos que $|2p^2 - q^2| \geq 1$. Esto lleva a la siguiente contradicción:

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right| = \frac{\left|\left(\frac{p}{q}\right)^2 - \frac{1}{2}\right|}{\frac{p}{q} + \frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{|2p^2 - q^2|}{2pq + q^2\sqrt{2}} > \frac{1}{4q^2} \geq \frac{1}{2^{\frac{1}{2}q(q+1)+1}}.$$

   Criterio de evaluación

- **(1 pt)** Encontrar el valor de $k(p,q)$.
- **(1 pt)** Usar que $\sqrt{2}$ es irracional para concluir que $|2p^2 - q^2| \geq 1$.
- **(2 pt)** Mostrar que $\left|\frac{p}{q} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right| > \frac{1}{2^{\frac{1}{2}q(q+1)+1}}$.

4. **Solución**

Vamos a utilizar las siguientes curvas orientadas en la solución del problema.

- C_R: El semicírculo de radio R centrado en el origen que va de $(R,0)$ a $(-R,0)$ por el semiplano superior.
- D_R: El semicírculo de radio R centrado en el origen que va de $(-R,0)$ a $(R,0)$ por el semiplano inferior.
- I_R: El intervalo que va de $(-R,0)$ a $(R,0)$.

Como es usual, denotaremos con $+$ la concatenación de dos curvas y anteponemos $-$ para cambiar el sentido de una curva.

Notemos que todos los puntos a_i están en el primer cuadrante de la hipérbola $\mathrm{Re}(z)^2 - \mathrm{Im}(z)^2 = 1$. De este modo, los ceros de p están en el primer cuadrante, y el único sobre el eje real es $a_1 = 1$. Como los ceros de p' están en la envolvente convexa de los ceros de p, tenemos que todos los ceros de p' están en el semiplano superior abierto (es imposible que 1 sea cero de p', pues 1 no es raiz repetida de p). De esta forma, podemos garantizar que para R suficientemente grande (digamos $R > R_1$), tenemos que todos los ceros de p' están en el interior de $C_R + I_R$.

Por el teorema de Cauchy, como $\frac{1}{p'}$ es analítica en el interior de $D_R + (-I_R)$, tenemos que

$$\int_{D_R+(-I_R)} \frac{1}{p'}\, dz = 0.$$

De esta forma, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{C_R} \frac{1}{p'}\, dz + \int_{I_R} \frac{1}{p'}\, dz &= \int_{C_R+I_R} \frac{1}{p'}\, dz \\
&= \int_{C_R+I_R} \frac{1}{p'}\, dz + \int_{D_R+(-I_R)} \frac{1}{p'}\, dz \\
&= \int_{C_R+D_R} \frac{1}{p'}\, dz.
\end{aligned}$$

Así, para terminar basta mostrar que $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{1}{p'}\, dz = 0$ y que $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R+D_R} \frac{1}{p'}\, dz = 0$. Para esto procedemos como sigue. Como $p(x)$ tiene grado al menos 3, entonces $p'(x)$ tiene grado al menos 2. Además, $p'(x)$ es mónico. Entonces para alguna R suficientemente grande (digamos $R > R_2$), tenemos que si $|z| = R$, entonces $|p'(z)| > \frac{R^2}{2}$ y por lo tanto

$$\left|\frac{1}{p'(z)}\right| < \frac{2}{R^2}.$$

Así, usando el lema de estimación, tenemos que

$$\left|\int_{C_R+D_R} \frac{1}{p'}\, dz\right| \leq \frac{2}{R^2}\, \ell(C_R + D_R) = \frac{4\pi R}{R^2} = \frac{4\pi}{R}$$

y que

$$\left|\int_{C_R} \frac{1}{p'}\, dz\right| \leq \frac{2}{R^2}\, \ell(C_R) = \frac{2\pi R}{R^2} = \frac{2\pi}{R}.$$

De estas desigualdades se sigue claramente que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R+D_R} \frac{1}{p'}\, dz = 0$$

y que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{1}{p'}\, dz = 0.$$

Criterio de evaluación

A grandes rasgos, la prueba consiste en dividir la integral real en dos integrales de línea complejas de modo que cada una de ellas se vaya a cero. La forma de lograr esto es cambiar el intervalo $[-R, R]$ por curvas para las cuales sus puntos tienen norma no acotada. El siguiente criterio aplica para la solución oficial, pero puede adaptarse para soluciones similares.

- **(1 pt)** Poner a $\int_{I_R}$ en términos de $\int_{C_R+I_R}$ y en términos de $\int_{C_R}$.
- **(1 pt)** Enunciar que los ceros de p' están en el semiplano superior abierto y usarlo para mostrar que $\int_{C_R+I_R} = \int_{C_R+D_R}$.
- **(1 pt)** Mostrar la cota $\left|\frac{1}{p'(z)}\right| < \frac{2}{R^2}$ para puntos en C_R y $C_R + D_R$.
- **(2 pt)** Usar la cota anterior y el lema de estimación para mostrar que $\int_{C_R}$ y $\int_{C_R+D_R}$ se van a cero.

5. **Solución**

Consideremos la función $f(x) = e^{x^2}$. Afirmamos que $f^{(n)}(x) = p_n(x)e^{x^2}$ en donde $p_n(x)$ es un polinomio de grado n. Procedemos por inducción sobre n. Claramente $f^{(0)}(x) = f(x)$ satisface la afirmación, pues $p_0(x) = 1$ y entonces es un polinomio de grado 0. Usando regla del producto y la hipótesis inductiva, tenemos que

$$f^{(n+1)}(x) = p_n'(x)e^{x^2} + 2xp_n(x)e^{x^2} = (p_n'(x) + 2xp_n(x))e^{x^2}.$$

Como por hipótesis inductiva p_n es de grado n, tenemos que $p_n'(x)+2xp_n(x)$ es de grado $n+1$, concluyendo la inducción. De la afirmación, tenemos inmediatamente que f es infinitamente diferenciable y que todas sus derivadas son continuas. Veremos ahora que estas derivadas aproximan cualquier función contínua.

Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua y $\epsilon > 0$ un real. Consideremos $h(x) = \frac{g(x)}{e^{x^2}}$. Como $e^{x^2} \neq 0$, entonces h también es contínua. De acuerdo al teorema de Stone-Weierstrass, h se puede aproximar uniformemente por polinomios y en particular se puede aproximar en norma L_2. De esta forma, existe un polinomio $P(x)$ tal que

$$\int_0^1 (h(x) - P(x))^2 \, dx < \frac{\epsilon}{e^2}.$$

Como en $\{p_0, p_1, \ldots\}$ tenemos un polinomio de cada grado, existe N y reales $a_0, a_1, \ldots, a_N$ tales que $P(x) = \sum_{i=0}^N a_i p_i(x)$. De esta forma, concluimos como sigue:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(g(x) - \sum_{i=0}^N a_i f^{(i)}(x) \right)^2 dx &= \int_0^1 \left(e^{x^2} h(x) - \sum_{i=0}^N a_i p_i(x) e^{x^2} \right)^2 dx \\
&= \int_0^1 e^{2x^2} (h(x) - P(x))^2 \, dx \\
&< e^2 \int_0^1 (h(x) - P(x))^2 \, dx < \epsilon.
\end{aligned}$$

Criterio de evaluación

- **(1 pt)** Determinar una función $f(x)$ que cumpla lo requerido.
- **(4 pt)** Mostrar que en efecto las derivadas de la función satisfacen lo requerido.

6. **Solución**

Notemos que la media logarítmica se puede poner en términos de integrales como sigue:

$$L(a,b,c) = 2 \iint\limits_{\substack{x, y \geq 0, \\ x + y \leq 1}} a^x b^y c^{1-x-y} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1}$$

Debido a la homegenidad, $L(a,b,c) = c \cdot L(a/c, b/c, 1)$, basta verificar (1) en el caso particular $c = 1$:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{x+y \leq 1} a^x b^y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{x=0}^1 a^x \left(\int_{y=0}^{1-x} b^y \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 a^x \frac{b^{1-x} - 1}{\log b} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\log b} \int_0^1 \left(b \left(\frac{a}{b} \right)^x - a^x \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\log b} \left(\frac{a-b}{\log \frac{a}{b}} - \frac{a-1}{\log a} \right) = \frac{a}{\log b} \left(\frac{1}{\log \frac{a}{b}} - \frac{1}{\log a} \right) - \frac{b}{\log b \cdot \log \frac{a}{b}} + \frac{1}{\log a \cdot \log b} \\
&= \frac{a}{(\log a - \log b) \log a} + \frac{b}{(\log b - \log a) \log b} + \frac{1}{\log a \cdot \log b} = \frac{1}{2} L(a,b,1).
\end{aligned}$$

La identidad (1) ha sido probada.

Para mostrar que $LM \leq AM$, se aplica la desigualdad AM-GM para el integrando en (1):

$$L(a,b,c) = 2 \iint\limits_{x+y\leq 1} a^x b^y c^{1-x-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq 2 \iint\limits_{x+y\leq 1} \big(xa + yb + (1-x-y)c\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{a+b+c}{3}.$$

Para mostrar que $LM \geq GM$ se aplica la desigualdad de Jensen a la función exponencial. Obtenemos

$$\begin{aligned} L(a,b,c) &= 2 \iint\limits_{x+y\leq 1} \exp\big(x\log a + y\log b + (1-x-y)\log c\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\geq \exp\left(2 \iint\limits_{x+y\leq 1} \big(x\log a + y\log b + (1-x-y)\log c\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right) \\ &= \exp\frac{\log a + \log b + \log c}{3} = \sqrt[3]{abc}. \end{aligned}$$

Nota:

Para n números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, la media logarítmica se puede definir como

$$L(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (n-1)! \cdot \exp[\log a_1, \log a_2, \ldots, \log a_n]$$

donde $\exp[\ldots]$ denota las diferencias divididas de la función exponencial. Es conocido que

$$L(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (n-1)! \cdot \int\limits_{\substack{x_1,\ldots,x_{n-1}\geq 0,\\ x_1+\ldots+x_{n-1}\leq 1}} \cdots \int a_1^{x_1} a_2^{x_2} \cdots a_{n-1}^{x_{n-1}} a_n^{1-x_1-\ldots-x_{n-1}}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}.$$

De esta fórmula, la relación $GM \leq LM \leq AM$ puede ser derivada de la misma manera que en la solución.

Criterio de evaluación

- **(2 pt)** Enunciar y mostrar la expresión integral para la media logarítmica.
- **(2 pt)** Mostrar que $LM \leq AM$.
- **(2 pt)** Mostrar que $LM \geq GM$.

7. **Solución**

   a) Consideremos el polinomio característico f_M de M. Tenemos que f_M es cuadrático con entradas en $\mathbb{F}_q$, de modo que sus raíces están en $\mathbb{F}_{q^2}$. Recordemos que el grupo de Galois de $\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q$ es de orden 2. Sea σ el elemento no trivial del grupo. Notemos que si x es una raíz de f_M, entonces $\sigma(x)$ es una raíz de F_M. Finalmente, notemos que matrices similares tienen el mismo orden. Consideremos las siguientes posibilidades:

- Si ambas raíces están en $\mathbb{F}_q$ y son distintas, entonces la matriz es diagonalizable. Entonces es similar a una matriz diagonal de $GL_2(q)$ y estas claramete tienen orden que divide a $q-1$.
- Si f_M tiene una raíz doble, entonces $\sigma(x) = x$ y entonces $x \in \mathbb{F}_q$. Más aún, ya que el término constante de f_M es igual al determinante de M, tenemos que $x^2 = 1$ y entonces $x = \pm 1$. Entonces f_M es producto de factores lineales y por lo tanto M es triangulable, es decir, es similar a una matriz de alguna de las siguientes formas:
$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} -1 & c \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
en donde c es un elemento de $\mathbb{F}_q$. Las matrices del primer estilo satisfacen $M^p = I$ y las del segundo tipo satisfacen $M^{2p} = I$. Esto muestra que el orden de M divide a $2p$.
- Si una de las raíces x cae fuera de $\mathbb{F}_q$ entonces $\sigma(x)$ también cae fuera de $\mathbb{F}_q$ y es distinto de x. Entonces M es similar a una matriz diagonal en $GL_2(\mathbb{F}_{q^2})$ con entradas diagonales x y $\sigma(x)$. Usando de nuevo que el término constante de f_M es el determinante, tenemos que $x\sigma(x) = x^{q+1} = 1$. De manera similar, $\sigma(x)^{q+1} = 1$ y por lo tanto el orden de M divide a $q+1$.

b) Para el converso tenemos los mismos tres casos. En el primero el hecho de que el grupo multiplicativo de un campo finito es cíclico nos permite escribir una matiz diagonal de orden t en donde t es cualquier divisor de $q-1$.

En el segundo caso las matrices
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
tienen respectivamente orden p y $2p$. El caso anterior ya cubre a 1 y 2, así que ya tenemos a los divisores de $2p$.

Para el tercer caso, tomamos x un elemento de F_{q^2} de orden que divide a $q+1$. Es suficiente encontrar una matriz $M \in GL_2(q)$ tal que f_M tenga a x como raíz. En otras palabras, necesitamos que
$$f_M(\lambda) = (\lambda - x)(\lambda - \sigma(x)) = \lambda^2 - (x + \sigma(x))\lambda + 1.$$
Esto quiere decir que basta tomar M de la forma
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
en donde $a+d = x+\sigma(x)$ y en donde además b y c se eligen de modo que $bc = ad-1$. Todas estas condiciones se satisfacen tomando $a = 1$, $d = x+\sigma(x)-1$, $b = 1$ y $c = x+\sigma(x)-2$.

Criterio de evaluación

- **(1 pt)** Separación correcta en los tres casos

a) Ambas raíces en $\mathbb{F}_q$ y distintas
b) Ambas raíces iguales
c) Ambas raíces en $\mathbb{F}_{q^2}$ y distintas

- Divisibilidad

  a) **(1 pt)** Mostrar que en este caso el orden divide a $q-1$
  b) **(1 pt)** Mostrar que en este caso el orden divide a $2p$
  c) **(1 pt)** Mostrar que en este caso el orden divide a $q+1$

- Acomodo

  a) **(1 pt)** Mostrar que si el entero divide a $q-1$ existe una matriz
  b) **(1 pt)** Mostrar que si el entero divide a $2p$ existe una matriz
  c) **(1 pt)** Mostrar que si el entero divide a $q+1$ existe una matriz