XVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria 2015

1. **(3 puntos)** Sean a y b números reales tales que $a < b$ y $ab > 0$. Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ una función continua. Muestre que existe un número real x en $[a, b]$ tal que $xf(x) = ab$.

2. **(4 puntos)** Demuestre que 65 es el mínimo número de rectas con las que se puede construir un polígono (no convexo) de 2015 lados tal que estas rectas contienen todos los lados del polígono.

3. **(4 puntos)** Sea $n \in \mathbb{N}$. Definimos $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ como $M(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n) = (v_n, v_{n-1}, \ldots, v_2, v_1)$. Determine todos los números $n \in \mathbb{N}$ para los cuales existe $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal tal que $L^2 = M$.

4. **(5 puntos)** Sea (a_n) una sucesión creciente de enteros positivos.

   a) Demuestre que si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ es finita entonces existe un conjunto infinito de enteros positivos, digamos S, de modo que la suma de cualquier cantidad finita de elementos distintos de S no es un término de la sucesión (a_n).

   b) ¿Será posible que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ diverja pero que aún así exista un conjunto S con las propiedades del inciso anterior?

5. **(5 puntos)** Demuestre que

$$\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} = -\frac{1}{2}$$

6. **(7 puntos)** Encuentre un entero positivo m tal que todo número de la forma $a^{2015} + b^{2015}$, dividido por m, tiene menos de $\dfrac{m}{5}$ residuos diferentes.

7. **(8 puntos)** Sean $a_1, a_2, .., a_k$ números enteros distintos con $\sum_{i=1}^{k} a_i = n$, sea g la permutación dada por:

   $$g = (1, 2, ..., a_1)(a_1 + 1, a_1 + 2, ..., a_1 + a_2)(a_1 + a_2 + 1, ...a_1 + a_2 + a_3)...(a_1 + \cdots + a_{k-1} + 1, ..., n)$$

   Muestre que el centralizador de g en Sym_n, el grupo simétrico en n letras, es un grupo abeliano.

   Recuerde: El centralizador de g en Sym_n es el subgrupo de las permutaciones en Sym_n que commutan con g y un grupo es abeliano si $xy = yx$ para todo x, y en el grupo.