XVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria 2015
Soluciones y Criterios para calificar

24 de noviembre de 2015

Problema 1 *Sean a y b números reales tales que $a < b$ y $ab > 0$. Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ una función continua. Muestre que existe un real x en $[a, b]$ tal que $xf(x) = ab$.*

Solución 1 *Consideremos la función $g(x) = xf(x) - ab$. Buscamos un punto c tal que $g(c) = 0$. Si multiplicamos las evaluaciones en a y b obtenemos*

$$g(a)g(b) = ab(f(a) - b)(f(b) - a)$$

Como $f(a) - b \leq 0$ y $f(b) - a \geq 0$, entonces el producto es menor o igual que cero. Si es cero, terminamos. Si no, las evaluaciones de g en a y b tienen signos diferentes. Por el teorema del valor intermedio, existe un punto c tal que $g(c) = 0$, es decir, tal que $cf(c) = ab$, como queríamos.

Criterio Propuesto:

- *1 punto Considerar la función g y decir que se busca $c \in [a, b]$ tal que $g(c) = 0$.*
- *1 punto Calcular $g(a)g(b)$.*
- *1 punto Usar el teorema del valor intermedio para concluir la existencia de dicho valor c.*

Problema 2 *Demuestre que 65 es el mínimo número de rectas con las que se puede construir un polígono (no convexo) de 2015 lados tal que estas rectas contienen todos los lados del polígono.*

Solución 2 *Supongamos que los lados del* 2015*-ágono están contenidos en k rectas. Note que cada recta pasa por a lo más $k-1$ veŕtices por ende contiene a lo más $\left[\frac{k-1}{2}\right]$ lados del polígono. En total esto es a lo más $k \times \left[\frac{k-1}{2}\right]$ lados, por ende $k \times \left[\frac{k-1}{2}\right] \geq 2015$. Como $64 \times \left[\frac{63}{2}\right] = 1984 < 2015$, necesitamos por lo menos 65 rectas.*

Criterio propuesto:

- *3 puntos por demostras que si los lados del polígono están contenidos en k rectas entonces contiene a lo más $\left[\frac{k-1}{2}\right]$ lados del polígono.*
- *1 punto Usar lo anterior para ver que $k \geq 65$.*

Problema 3 *Sea* $n \in \mathbb{N}$. *Definimos* $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *como* $M(v_1, v_2, ..., v_{n-1}, v_n) = (v_n, v_{n-1}, ..., v_2, v_1)$.*Determine todos los números* $n \in \mathbb{N}$ *para los cuales existe* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *lineal tal que* $L^2 = M$

Solución *3 Llamemos* M_n *a la matriz asociada a* M *con respecto a la base canónica de* $\mathbb{R}^n$. *Es fácil ver que:*

$$det(M_1) = 1,$$
$$det(M_2) = -1$$
$$det(M_3 = -1$$
$$det(M_4) = 1$$

y que $det(M_{n+1}) = (-1)^{n+2} det(M_n)$. *Utilizando inducción se obtiene que:*

$$det(M_{4k+1}) = det(M_{4k}) = 1,$$
$$det(M_{4k+2}) = det(M_{4k+3}) = -1$$

Si existe L_n *lineal tal que* $L_n^2 = M_n$, *entonces* $det(M_n) \geq 0$. *Por lo tanto para* $n = 4k+2$ *o* $n = 4k+3$ *no existe dicha transformación lineal.*

Veremos ahora que para los otros casos si se puede. Consideremos la base de $\mathbb{R}^n$ *dada por* $e_i = (\underbrace{0, .., 0}_{i-1}, 1, 0, 0, ..., 0)$

Para $n = 4k$ *definimos* $L(e_{4i+1}) = e_{4(k-1-i)+3}$, $L(e_{4i+2}) = e_{4i+1}$, $L(e_{4i+3}) = e_{4i+4}$, $L(e_{4i+4}) = e_{4(k-1-i)+2}$, *para* $i = 0, ..., k-1$. *y extendemos linealmente.*

Usando la definición de L *vemos que*

$$L^2(e_{4i+1}) = L(e_{4(k-1-i)+3}) = e_{4(k-1-i)+4} = M(e_{4i+1}),$$
$$L^2(e_{4i+2}) = L(e_{4i+1}) = e_{4(k-1-i)+3} = M(e_{4i+2}),$$
$$L^2(e_{4i+3}) = L(e_{4i+4}) = e_{4(k-1-i)+2} = M(e_{4i+3}),$$
$$L^2(e_{4i+4}) = L(e_{4(k-1-i)+2}) = e_{4(k-1-i)+1} = M(e_{4i+4})$$

Por lo tanto $L^2 = M$.

Similarmente para $n = 4k+1$ *consideremos las cuartetas* $(e_{4i+1}, e_{4i+2}, e_{4(k-1-i)+4}, e_{4(k-1-i)+5})$ *y* $(e_{4i+3}, e_{4i+4}, e_{4(k-1-i}$ *para* $i = 0, ..., k-1$. *Notar que cada una de las cuartetas bajo* M *el orden se invierte, cada una de ellas las podemos ver como* (a_1, a_2, a_3, a_4). *Definimos en este caso* $L(a_1) = a_3$, $L(a_2) = a_1$, $L(a_3) = a_4$ *y* $L(a_4) = a_2$. *Solo nos falta definir* $L(e_{2k+1}) = e_{2k+1}$. *Es fácil ver que la* L *así definida satisface* $L^2 = M$.

Criterio Propuesto:

- *2 puntos por hallar el* $det(M_n)$ *para todo* n *y decir que en los casos* $n = 4k+2$ *y* $n = 4k+3$ *no existe la* L.
- *1 punto por dar la* L *en el caso* $n = 4k$.
- *1 punto por dar la* L *en el caso* $n = 4k+1$.

Problema 4 *Sea (a_n) una sucesión creciente de enteros positivos.*

- *Demuestra que si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ es finita entonces existe un conjunto infinito de enteros positivos, digamos S, de modo que la suma de cualquier cantidad finita de elementos distintos de S no es un término de la sucesión (a_n).*

- *¿Será posible que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ diverja pero que aún así exista un conjunto S con las propiedades del inciso anterior?*

Solución 4 *Decimos que una sucesión de enteros positivos (x_n) es espaciosa si es creciente y para todo $M \in \mathbb{N}$ existe un entero n tal que $x_{n+1} - x_n > M$.*

Primero probaremos el siguiente lema.

Lema 1 *Sea (x_n) una sucesión de enteros positivos. Si la sucesión es espaciosa entonces existe un conjunto infinito S de enteros positivos que cumple que la suma de cualquier cantidad finita de elementos distintos de S no es un elemento de (x_n).*

Proof. *Construiremos el conjunto S recursivamente. Tomemos un entero x con $x \notin (x_n)$, sea $S_1 = \{x\}$. Ahora supongamos que está construido el conjunto de n elementos S_n de forma que la suma de los elementos de cualquier subconjunto no es un término de la sucesión. Sea $M_n = \sum_{s \in S_n} s$, como la sucesión es espaciosa existe k_n tal que $x_{k_n+1} - x_{k_n} > M_n + 1$. Tomando $S_{n+1} = S_n \cup \{x_{k_n} + 1\}$ es claro que el nuevo conjunto cumple la propiedad deseada.*

Finalmente nuestro conjunto infinito será $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, como cada S_n cumple la propiedad entonces S también. ■

- *Para el primer inciso supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ converge. Si la sucesión (a_n) no es espaciosa entonces existe un M tal que $M > a_{n+1} - a_n$ para todo n y $M > a_1$. Entonces $Mn > a_n$ para todo n por lo que $\frac{1}{a_n} > \frac{1}{Mn}$ y por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Mn} = \infty$ lo cual nos lleva a una contradicción. Podemos concluir que la sucesión (a_n) es espaciosa, aplicando el lema queda demostrado el primer inciso.*

- *La respuesta a la pregunta del segundo inciso es afirmativa. Por el lema bastará encontrar una sucesión espaciosa que cumpla que la suma de los recíprocos diverje. Hay varias formas de lograr esto, una de ellas es notar que la sucesión de los primos es una sucesión espaciosa y efectivamente la suma de sus recíprocos diverge.*

Criterio Propuesto:

- *2 puntos por demostrar el Lema 1 o equivalente.*

- *2 puntos por demostrar que si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ converge, entonces es espaciosa.*

- *1 punto por dar y decir por que la sucesión dada cumple las condiciones.*

Problema 5 *Demuestre que*

$$cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)+cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)=-\frac{1}{2}$$

Solución 5 *Veamos que las raíces septimas de la unidad que no son uno son* $x_j=\cos\frac{2\pi j}{7}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi j}{7}$ *con* $j=1,2,\ldots,6$. *Entonces cada uno de estas satisfacen la ecuación*

$$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0. \qquad (*)$$

Por otro lado se cumple que $y_i=x_i+\frac{1}{x_i}=2\cos\frac{2\pi i}{7}$, *además*

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right) \qquad x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$$

entonces dividiendo $(*)$ *por* x^3, *utilizando las ecuaciones anteriores y realizando la sustitución* $y=x+\frac{1}{x}$ *deducimos que los* y_i *satisfacen la ecuación*

$$y^3+y^2-2y-1=0.$$

Por lo tanto los números $2\cos\frac{2\pi}{7}$, $2\cos\frac{4\pi}{7}$ *y* $2\cos\frac{2\pi}{7}$ *son raices de la ecuación anterior. Luego por las identidades de Vieta se cumple que*

$$4\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+4\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}+4\cos\frac{8\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}=-2$$

pues -2 *es el coeficiente de la potencia* y *en la ecuación. La identidad anterior implica la identidad buscada.*

Criterio Propuesto:

- *1 punto por decir que las raíces séptimas de la unidad distintas de* 1 *satisfacen que* $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$.
- *2 puntos por demostrar que* $y_j=x_j+\frac{1}{x_j}$ *satisface la ecuación* $y^3+y^2-2y-1=0$.
- *2 puntos por usar la fórmula de Vieta para concluir el resultado.*

Problema 6 *Encontrar un entero positivo* m *tal que todo número de la forma* $a^{2015}+b^{2015}$, *dividido por* m, *tiene menos de* $\dfrac{m}{5}$ *residuos diferentes.*

Solución 6 *Demostramos que* $m = 2015^2$ *es un número que cumple.*

Lema 2 *Para cada primo* p, *los números* a^p $(a = 0, 1, 2, \ldots)$ *nos dan* p *residuos diferentes módulo* p^2.

Proof.

Si $a = pc + d$ *con* $0 \leq d < p$, *entonces* $a^p = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{p}{k}(pc)^k d^{p-k} \equiv d^p \pmod{p^2}$; *por lo tanto,* d *determina clase de residuos de* a^p *módulo* p^2. *Adicionalmente,* $d^p \equiv d \pmod{p}$, *entonces valores diferentes de* d *nos dan residuos distintos.* $\square$ $\blacksquare$

Lema 3 *Para cada primo* p, *tlos números* $a^p + b^p$ $(a, b = 0, 1, 2, \ldots)$ *dan a lo más* $\frac{p(p+1)}{2}$ *residuos distintos módulo* p^2.

Proof. *Notemos que* a^p *y* b^p *módulo* p^2, *están determinados por los residuos módulo* p *como en el Lema 2. Como el orden de los residuos de* a *y* b *no importa hay a lo más* $\frac{p(p+1)}{2}$ *posibles residuos módulo* p^2. $\blacksquare$

Ahora consideremos los divisores primos de $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. *Aplicando el Lema 3 a los primos* $5, 13, 31$, *podemos ver que los números* $a^{2015} + b^{2015}$ *dan a lo más* $5 \cdot 3$ *residuos distintos módulo* 5^2 *y* $13 \cdot 7$ *residuos distintos módulo* 13^2 *y* $31 \cdot 16$ *residuos distintos módulo* 31^2. *Por el teorema chino del residuo, el número de residuos distintos módulo* 2015^2 *es a los más* $(5 \cdot 3) \cdot (13 \cdot 7) \cdot (31 \cdot 16)$. *Como*

$$\frac{(5 \cdot 3) \cdot (13 \cdot 7) \cdot (31 \cdot 16)}{5^2 \cdot 13^2 \cdot 31^2} = \frac{336}{2015} \approx 0{,}17 < \frac{1}{5},$$

El número $m = 2015^2$ *cumple.*

Nota 1 *En la demostración del Lema 3 podemos notar que* $a^p + (p-a)^p \equiv 0 \pmod{p^2}$, *por lo tnto al menos* $\frac{p+1}{2}$ *pares dan* 0 *como residuo. Por ende, la cota* $\frac{p(p+1)}{2}$ *puede ser mejorada a* $\frac{p(p+1)}{2} - \frac{p-1}{2} = \frac{p^2+1}{2}$.

Nota 2 *Cálculos en el computador demuestran que los números* $a^{2015} + b^{2015}$ *dan en total* 371059 *residuos distintos; la razón real es* $\frac{371059}{2015^2} \approx 0{,}914$.

Criterio Propuesto:

- *3 puntos por proponer y demostrar el Lema 2 o equivalente.*
- *2 puntos por proponer y demostrar el Lema 3 o equivalente.*
- *2 puntos por usar el teorema chino del residuo para concluir el problema.*

Problema 7 *Sean $a_1, a_2, .., a_k$ números enteros distintos con $\sum_{i=1}^{k} a_i = n$, sea g la permutación dada por:*

$$g = (1, 2, ..., a_1)(a_1 + 1, a_1 + 2, ..., a_1 + a_2)(a_1 + a_2 + 1, ...a_1 + a_2 + a_3)...(a_1 + \cdots + a_{k-1} + 1, ..., n)$$

(alternativamente):

$$g = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdots \sigma_k$$

donde los σ_i son ciclos disjuntos 2 a 2 con el tamañ o de σ_i igual a a_i.

Muestre que el centralizador de g en Sym_n, el grupo simetrico en n letras, es un grupo abeliano.

Recuerde: El centralizador de g en Sym_n es el subgrupo de las permutaciones en Sym_n que commutan con g y un grupo es abeliano si $xy = yx$ para todo x, y en el grupo.

Solución 7 *Vamos a probar que el centralizador buscado es el grupo generado por las permutaciones $\sigma_1, ..., \sigma_k$ que es obviamente abeliano.*

Sea x una permutación que commuta con g, y sea m un elemento con

$$|Orbita_g(m)| = a_n$$

donde $Orbita_g(m) = \{g^i(m) : m \in \mathbb{Z}\}$ ahora $x^i g^j(m) = g^j x^i(m)$ considerando todos los posibles valores de j nos queda que $x^i(Orbita_g(m)) = Orbit_g(x^i(m))$ de manera que $|Orbita_g(x^i(m))| = |x^i(Orbita_g(m))| = a_n$, como g solo tiene una orbita de tamaño a_n entonces $x^i(m) \in Orbtia_g(x^i(m)) = Orbita_g(m)$ así $Orbita_x(m) \subset Orbita_g(m)$ es decir x se descompone como producto de transpocisiones disjuntas $\rho_1 \cdot \rho_2 \cdots \rho_k$ donde ρ_i solo mueve elementos movidos por el ciclo σ_i. Claramente ρ_i commuta con σ_j para todo $i \neq j$ de manera que necesitamos solamente que ρ_i y σ_i commuten. Para esto ρ_i debe ser una potencia de σ_i ya que e centralizador de un $a_i -$ ciclo en Sym_{a_i} es el grupo ciclico generado por el mismo:

Prueba: Vamos a hacer la prueba en general de que el centralizador de un n-ciclo en Sym_n es el grupo generado por el mismo. Sea c un n-ciclo, digamos $c = (1, 2, 3, ..., n)$ y x una permutación que conmute con c entonces

$$c = (1, 2, ..., n) = xgx^{-1} = (x(1), x(2), ..., x(n))$$

Así si $x(1) = 1 + k$ con $0 \leq k \leq n - 1$ entonces $x(i) = i + k$ para todo i, donde las sumas son modulo n y así $x = g^k$.

Prueba 2: Sea $Cl(g)$ la clase de conjugación de g en Sym_n, $C(g)$ su centralizador entonces

$$(n-1)! = |Cl(g)| = |Sym_n : C(g)| = \frac{n!}{|C(g)|}$$

de manera que $|C(g)| = n$ ahora $| < g > | = n$ y $< g > \leq C(g)$ de manera que debemos tener que $< g >= C(g)$.

Criterio Propuesto:

- *3 pts por demostrar que cualquier permutación que conmute con σ debe descomponerse como producto de k ciclos disjuntos con ρ_i deja fijos a los elementos que no mueve σ_i.*
- *2 punto por decir que ρ_i debe conmutar con σ_i.*
- *3 puntos por demostrar que para que ρ_i conmute con σ_i necesariamente ρ_i es una potencia de σ_i (cualquiera de las dos demostraciones propuestas).*