# XIX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas Universitaria 2016

**Problema 1. (3 puntos).** Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ una función continua y estrictamente creciente. Demuestra que las dos condiciones siguientes son equivalentes:

$(i)$ $f(x) \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.

$(ii)$ $\lfloor f(x) \rfloor = f(\lfloor x \rfloor)$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

**Solución al problema 1.**
Primero demostraremos que $(ii)$ implica $(i)$.
Notemos que si $x \in \mathbb{Z}^+$, $f(x) = f(\lfloor x \rfloor) = \lfloor f(x) \rfloor \in \mathbb{Z}$.
Sea $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) \in \mathbb{Z}$ y que $\lfloor x \rfloor < x$. Por $(ii)$ se tiene que $f(x) = \lfloor f(x) \rfloor = f(\lfloor x \rfloor)$. Como $f$ es creciente si $\lfloor x \rfloor < x$, se tendría que $f(\lfloor x \rfloor) < f(x)$, que es contrario a lo anterior, por lo tanto $x \in \mathbb{Z}$.
Para demostrar $(i)$ implica $(ii)$.
Si $x \in \mathbb{Z}^+$, entonces $f(x) \in \mathbb{Z}^+$, por lo que $\lfloor f(x) \rfloor = f(x) = f(\lfloor x \rfloor)$.
Tomemos ahora $x \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{Z}$. Entonces $\lfloor x \rfloor < x < \lfloor x \rfloor + 1$, lo que implica por ser $f$ creciente que $f(\lfloor x \rfloor) < f(x) < f(\lfloor x \rfloor + 1)$, como $\lfloor x \rfloor$ y $\lfloor x \rfloor + 1$ son enteros $f(\lfloor x \rfloor)$ y $f(\lfloor x \rfloor + 1)$ son enteros por lo que $f(\lfloor x \rfloor) = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor \leq \lfloor f(x) \rfloor < f(x) < \lfloor f(\lfloor x \rfloor + 1) \rfloor = f(\lfloor x \rfloor + 1)$.
Si $f(\lfloor x \rfloor) = \lfloor f(x) \rfloor$, terminamos. En caso contrario, $f(\lfloor x \rfloor) < \lfloor f(x) \rfloor < f(\lfloor x \rfloor + 1)$, y por el teorema del valor intermedio existe $y \in (\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1)$ tal que $f(y) = \lfloor f(x) \rfloor$, pero por $(i)$ sucede que $y \in \mathbb{Z}$, lo cual es absurdo.

**Criterio de calificación del problema 1.**
Considerando que la redacción del problema 1 en el examen está incompleta la condición $(i)$ $f(x) \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow x \in \mathbb{Z}$, (solamente apareció $(i)$ $f(x) \in \mathbb{Z} \Longrightarrow x \in \mathbb{Z}$). Será así la propuesta del criterio:

Por tener bien la parte: $(ii) \Longrightarrow (i)$ $f(x) \in \mathbb{Z} \Longrightarrow x \in \mathbb{Z}$ **(3 puntos).**

Por tener una observación de que: $(i) \Longrightarrow (ii)$ es falsa, **(1 punto).**

**Problema 2. (4 puntos).** Sean $a_1 < a_2 < ... < a_n$ enteros positivos impares.
Demuestra que,

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{[a_1,a_2]} + \frac{1}{[a_1,a_2,a_3]} + \cdots + \frac{1}{[a_1,a_2,...,a_n]} < \frac{3}{2}.$$

Aquí $[a_1, a_2, ..., a_i]$ es el mínimo común múltiplo de los números $a_1, a_2, ..., a_i$.

**Solución al problema 2.**

Denotemos por $(a, b)$, al máximo común divisor de los enteros positivos $a$ y $b$.

Observe que para $i \geq 2$, el número $(a_{i-1}, a_i)$ es impar y divide al número par $a_i - a_{i-1}$. Luego, $(a_{i-1}, a_i) \leq \frac{a_i - a_{i-1}}{2}$. Además,

$$\frac{1}{[a_1,a_2,...,a_i]} \leq \frac{1}{[a_{i-1},a_i]} = \frac{(a_{i-1},a_i)}{a_{i-1}a_i} \leq \frac{a_i - a_{i-1}}{2a_{i-1}a_i} = \frac{1}{2a_{i-1}} - \frac{1}{2a_i}.$$

Sumando todas estas desigualdades para $i = 2, ..., n$, obtenemos

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{[a_1,a_2]} + \cdots + \frac{1}{[a_1,a_2,...,a_n]} \leq \frac{1}{a_1} + \sum_{i=2}^{n} \left( \frac{1}{2a_{i-1}} - \frac{1}{2a_i} \right) = \frac{3}{2a_1} - \frac{1}{2a_n} < \frac{3}{2}.$$

**Criterio de calificación del problema 2.**

Por establecer una cota superior de cada sumando que sea manejable para resolver el problema **(2 puntos)**

Por terminar de resolver el problema **(2 puntos)**

**Problema 3. (4 puntos).** Los números reales positivos $a, b$ y $c$ cumplen con la condición de que $ab + ac + bc \leq 3abc$. Demuestra que,

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a + b + c.$$

**Solución al problema 3.**
Observe que por la condición y la desigualdad $AM - GM$, se tiene que

$$abc \geq \tfrac{ab+bc+ca}{3} \geq \sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca},$$

luego $abc \geq 1$.
Entonces al homogenizar y utilizar de nuevo la desigualdad $AM - GM$ se tiene que

$$a \leq a \cdot (abc)^{\frac{2}{3}} = (a^3)^{\frac{5}{9}} \cdot (b^3)^{\frac{2}{9}} \cdot (c^3)^{\frac{2}{9}} \leq \frac{5}{9}a^3 + \frac{2}{9}b^3 + \frac{2}{9}c^3. \tag{a}$$

De manera similar se puede obtener

$$b \leq \frac{2}{9}a^3 + \frac{5}{9}b^3 + \frac{2}{9}c^3 \tag{b}$$

y

$$c \leq \frac{2}{9}a^3 + \frac{2}{9}b^3 + \frac{5}{9}c^3 \tag{c}$$

El problema resulta de sumar $(a)$, $(b)$ y $(c)$.

**Segunda solución.**
La desigualdad es equivalente a $\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c} \geq 1$. Pero,

$$\tfrac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c} = \left(\tfrac{a}{a+b+c}\right) a^2 + \left(\tfrac{b}{a+b+c}\right) b^2 + \left(\tfrac{c}{a+b+c}\right) c^2 = I$$

por la desigualdad útil*

$$I \geq \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)} = \frac{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2} = J$$

La hipótesis $ab + bc + ca \leq 3abc$, nos dice que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3, \text{ por lo que } \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \geq \frac{1}{3}.$$

Y la desigualdad $AM - GM$, garantiza que, $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$.
Luego

$$J = \frac{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2} \geq \frac{9}{9} = 1.$$

*La desigualdad útil afirma que: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$, para $a, b, c$ números reales no negativos y $x, y, z$, números reales positivos.

**Criterio de calificación del problema 3.**

**Con la primera solución:**

Ver que la restricción garantiza que $abc \geq 1$ **(1 punto)**

Ver que $a \leq \frac{5}{9}a^3 + \frac{2}{9}b^3 + \frac{2}{9}c^3$, y sus análogos. **(3 puntos)**

**Con la segunda solución:**

Reducir la desigualdad a $\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c} \geq \frac{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2} = J \geq 1$ **(2 puntos)**

Ver que $J \geq 1$ **(2 puntos)**

**Problema 4. (5 puntos).** Sea $G$ un grupo donde todo elemento $x \in G$, con $x \neq 1$, tiene orden $p$. Muestra que si en cualquier subconjunto $A$ de $G$ con $p^2 - 1$ elementos, hay $p$ de ellos que conmutan dos a dos, entonces $G$ es un grupo Abeliano.

**Solución al problema 4.**
*Lema 1.* El número $p$ es un número primo.

Supongamos que $p = ab$, con $a > 1$, $b > 1$, para $x \in G$ con $x \neq 1$, se tiene que $x^a \neq 1$, y que su orden es $b < p$, una contradicción. Luego $p$ es primo.

*Lema 2.* Si $x, y \in G$ son tales que $x^i y^j = y^j x^i$ para algunos $i, j$ con $2 \leq i, j \leq p-1$, entonces $xy = yx$.

Si $(j, p) = 1$, entonces existe $a \in \mathbb{Z}$ con $1 \leq a \leq p-1$ tal que $aj \equiv 1 (\text{mod} p)$. Luego $x^i y^{aj} = y^{aj} x$. Como $a_j = 1 + mp$, para algún $m \in \mathbb{Z}$, $y^{aj} = y^{1+mp} = y$, por lo que $x^i y = y x^i$.

De igual manera si $(i, p) = 1$, se puede encontrar $b \in \mathbb{Z}$ con $1 \leq b \leq p-1$ tal que $bi \equiv 1 (\text{mod} p)$.

Luego como $x^i y = y x^i$, se tiene que $x^{bi} y = y x^{bi}$, pero $bi - 1 = np$, para algún $n \in \mathbb{Z}$, por lo que $x^{bi} = x^{1+np} = x$ y entonces $xy = yx$.

Ahora regresamos a la solución del problema.
Supongamos que existen $x, y \in G$ con $xy \neq yx$. Sea $A = \{x^i y^j \in G \ ; \ 0 \leq i, j \leq p-1\} \setminus \{1\}$. En principio $A$ tiene $p^2 - 1$ elementos. Sea $B \subset A$ un subconjunto con $p$ elementos, tal que cualesquiera dos elementos de $B$ conmutan.
Si existe $i \geq 1$, tal que $x^i \in B$, entonces $B$ contine al menos un elemento de la forma $x^a y^b$ con $0 \leq a \leq p-1$, $0 \leq b \leq p-1$. Como $x^i \left(x^a y^b\right) = \left(x^a y^b\right) x^i$, luego se tiene $x^i y^b = y^b x^i$ y por el lema anterior $xy = yx$. El mismo argumento se usa para ver que si algún elemento de la forma $y^j$ esta en $B$, entonces $xy = yx$.
Por lo anterior podemos considerar que $B$ solamente contiene elementos que pertenecen al siguiente arreglo (y solo $p$ de ellos).

$$\begin{array}{cccc}
xy & xy^2 & \cdots & xy^{p-1} \\
x^2y & x^2y^2 & \cdots & x^2y^{p-1} \\
\vdots & & & \\
x^{p-1}y & x^{p-1}y^2 & \cdots & x^{p-1}y^{p-1}
\end{array}$$

Por el principio del palomar (de las casillas), hay dos elementos en $B$ que estará sobre la misma línea.
Digamos que son $x^a y^b$ y $x^a y^c$. Como $(x^a y^b)(x^a y^c) = (x^a y^c)(x^a y^b)$ y suponiendo que $b > c$, se tiene que $y^{b-c} x^a = x^a y^{b-c}$, el lema 2 implica que $xy = yx$, una contradicción.

**Criterio de calificación del problema 4.**

| | |
|---|---|
| Establecer el Lema 1 | **(1 punto)** |
| Establecer el Lema 2 | **(2 puntos)** |
| Concluir el problema | **(2 puntos)** |

**Problema 5. (5 puntos).** Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen:

$$f(x + yf(x)) + f(y - f(x)) = 2xf(y), \text{ para todos los números reales } x, y.$$

**Solución al problema 5.**

Si $x = y = 0$, $\quad f(0) + f(-f(0)) = 0 \quad (1)$

Si $y = 0$, $\quad f(x) + f(-f(x)) = 2xf(0) \quad (2)$

Si $x = 0$, $\quad f(yf(0)) + f(y - f(0)) = 0 \quad (3)$

Ahora si $f(0) = 0$, entonces de (3) se tiene que $f(y) = 0$. Tenemos entonces que una solución de la ecuación es la función constante cero.

Supongamos ahora que $f(0) \neq 0$.

La condición (2) garantiza que $f$ es inyectiva:

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow f(x) + f(-f(x)) = f(y) + f(-f(y)) \Longrightarrow 2xf(0) = 2yf(0) \Longrightarrow x = y.$$

Tomando $y = f(0)$ en (3) $\quad f(f(0)^2) + f(0) = 0 \quad (4)$

Ahora, (1), (4) garantizan que $f(f(0)^2) = f(-f(0))$, y como $f$ es inyectiva, $f(0)^2 = -f(0)$. Por lo que $f(0) = 0$ o $f(0) = -1$, pero el primer caso esta ya descartado, por lo que $f(0) = -1$.

Ahora (3) y $f(0) = -1$ nos asegura que $\quad f(-y) + f(y + 1) = 0 \quad (5)$

Al hacer $y = -\frac{1}{2}$ en (5) se tiene que $f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}) = 0$, por lo que $f(\frac{1}{2}) = 0$.

Si hacemos $y = \frac{1}{2}$ en la ecuación original, $\quad f(x + \frac{f(x)}{2}) + f(\frac{1}{2} - f(x)) = 0 \quad (6)$

Y si hacemos $y = f(x) - \frac{1}{2}$ en (5), $\quad f(\frac{1}{2} - f(x)) + f(f(x) - \frac{1}{2} + 1) = 0 \quad (7)$

Las dos últimas identidades muestran que, $\quad f(x + \frac{f(x)}{2}) = f(f(x) - \frac{1}{2} + 1) \quad (8)$

La inyectividad de $f$, garantiza que $x + \frac{f(x)}{2} = f(x) - \frac{1}{2} + 1$, por lo que $f(x) = 2x - 1$.

Es fácil ver que $f(x) \equiv 0$ y $f(x) = 2x - 1$ satisfacen la ecuación original, por lo que estas son las únicas funciones que resuelven el problema.

**Criterio de calificación del problema 5.**

Mostrar que $f$ es inyectiva. **(1 punto)**

Mostrar que $f(0)^2 = -f(0)$ y entonces $f(0) = 0$ o $-1$. **(1 punto)**

Mostrar que $f(-y) + f(y + 1) = 0$. **(1 punto)**

Mostrar que $f(x) = 2x - 1$ es la otra solución. **(2 puntos)**

**Problema 6. (7 puntos).** Para un entero positivo $n$, un acomodo $n$-bicoloreado consiste de 3 triángulos rojos y $n$ triángulos azules que satisfacen las siguientes condiciones:

- No existe una recta que pase por los tres triángulos rojos.
- Cada triángulo rojo y cada triángulo azul se intersectan.

Determina el menor valor de $k$ para el cual para cualquier acomodo $n$-bicoloreado se puedan encontrar $k$ puntos del plano que toquen a todos los triángulos azules del acomodo.

**Solución al problema 6.** El mínimo valor para $k$ es $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Para mostrar esto veremos que esta cantidad de puntos siempre es suficiente, y luego daremos un acomodo que requiere esta cantidad de puntos.

Primero, mostraremos que $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ puntos siempre son suficientes. Llamemos $X$, $Y$ y $Z$ a los tres triángulos rojos.

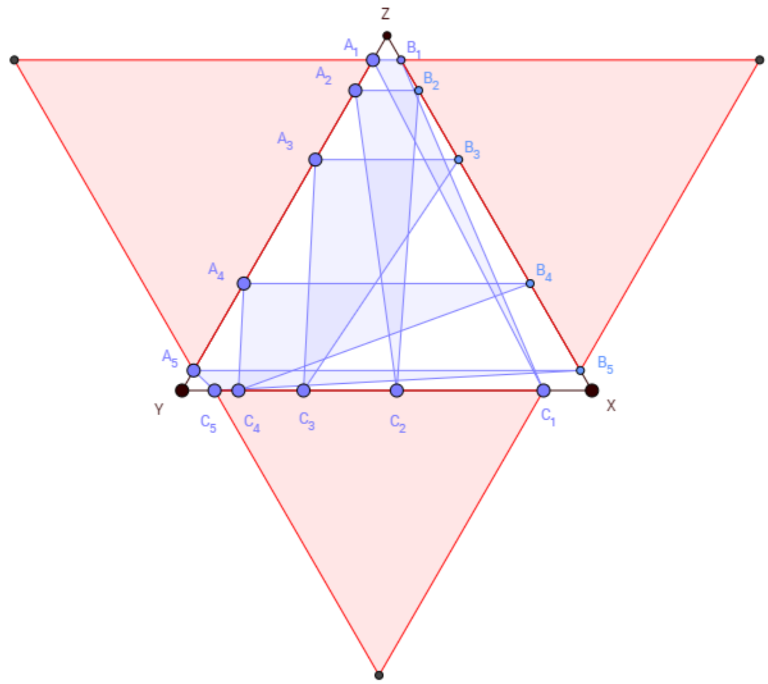
Afirmamos que cualquier pareja de triángulos azules se intersecta. En efecto, si hubiera dos de ellos $T$ y $S$ que no se intersectan, entonces podemos encontrar una línea $\ell$ que deja a $T$ de un lado y a $S$ del otro. Sea $p$ un punto en la intersección de $T$ con $X$ y $q$ un punto en la intersección de $S$ con $X$. Como $p$ y $q$ están de lados opuestos de $\ell$, el segmento que los une tiene un punto $z$ de $\ell$. Como $X$ es un triángulo (y es convexo), entonces $z$ está en $X$. Esto muestra que la recta $\ell$ atraviesa a $X$ y de manera análoga se muestra que atraviesa a $Y$ y a $Z$. Esto es una contradicción a la hipótesis de que no hay ninguna recta que pase por los tres triángulos rojos.

De esta forma, los triángulos se intersectan de dos en dos. Entonces los agrupamos en $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ parejas y, si $n$ es impar, un triángulo adicional. Tomando un punto para cada pareja y, si $n$ es impar, un punto para el triángulo que sobra, encontramos los $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ puntos que necesitamos.

Ahora hay que ver que hay acomodos que en efecto necesitan $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ puntos. Para $n = 1$ la construcción es sencilla, así que supondremos que $n$ es al menos 2. Una forma de hacer el acomodo es como en la figura. La intuición es que haremos el ejemplo dibujando los triángulos azules "cada vez más abajo", de modo que nunca haya tres triángulos azules con intersección no vacía. Para mayor precisión, a continuación describimos la construcción.

**Construcción**

- Dibujamos un triángulo equilátero $XYZ$.
- Para $i$ en $\{1, 2, \ldots, n\}$ dibujamos puntos $A_i$, $B_i$, $C_i$ de manera recursiva. En lo que sigue se asume de manera impícita que las $A's$ están en el interior del segmento $YZ$, las $B's$ en el del $ZX$ y las $C's$ en el del $XY$. También, siempre haremos $A_iB_i$ paralelo a $XY$.
- Dibujamos arbitrariamente un triángulo $A_1B_1C_1$.
- Dibujamos un triángulo $A_2B_2C_2$ de modo que $A_2B_2$ quede bajo $A_1B_1$ y $C_2$ a la izquierda de $C_1$.
- Para $2 \leq i \leq n$, una vez que hayamos dibujado los puntos hasta un índice $i$, dibujamos $A_{i+1}B_{i+1}$ bajo todas las regiones de intersecciones de dos en dos de los triángulos anteriores, y arriba de $XY$. Dibujamos $C_{i+1}$ a la izquierda de todos los $C$'s anteriores.




- Ya que hicimos esto, consideramos los segmentos $A_1A_n$, $B_1B_n$ y $C_1C_n$ y cada uno de estos los convertimos en un triángulo equilátero hacia afuera. Definimos a estos triángulos exteriores como los triángulos rojos, y a los triángulos de la forma $A_iB_iC_i$ como los triángulos azules.

Vamos a ver que este es un acomodo $n$-bicoloreado que cumple lo que queremos. Primero, está construido de modo que cada triángulo rojo intersecta a cada triángulo azul. Veamos que los triángulos rojos no tienen línea transversal. Si la hubiera, tendría que ser una línea transvesal a los tres segmentos $A_1A_n$, $B_1B_n$ y $C_1C_n$, y por lo tanto a $XY$, $YZ$ y $ZX$. Pero las únicas líneas transversales a los lados de un triángulo son sus propios lados, y ninguno de estos lados es transvesal a $A_1A_n$, $B_1B_n$ y $C_1C_n$.

Finalmente, la construcción garantiza que no haya tres triángulos azules que tengan intersección no vacía. Así, cualquier punto que tomemos del plano puede tocar a lo mucho a dos de los triángulos azules. De esta forma, se requieren al menos $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ para tocarlos a todos.

**Criterio de calificación del problema 6.**

Mostrar que son suficientes $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ puntos **(3 puntos)**

Mostrar que debe haber al menos $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ puntos **(4 puntos)**

Puntos parciales. Se podrá dar **(1 punto)** por una construcción que funcione sin tener el valor optimo $k$.

**Problema 7. (7 puntos).**

(a) Sea $K$ un entero positivo y sea $f(x)$ un polinomio real distinto de cero que no tiene raíces complejas en el dominio definido por la condición angular $|argz| < \frac{\pi}{2K}$. Demuestra que existe un polinomio real diferente de cero $g(x)$ tal que los coeficientes de $g(x)$ sean todos no negativos, que $f(x)$ divida a $g(x)$ y que *grado* $g \leq K \cdot$ *grado* $f$.

(b) Construye para todo entero positivo $K$ un polinomio real distinto de cero $f(x)$ que no tenga raíces complejas en el dominio definido por la condición angular $|argz| < \frac{\pi}{2K}$, que satisfaga la propiedad que todo polinomio diferente de cero $g(x)$ que es divisible entre $f(x)$, que tenga solamente coeficientes no negativos, y además que también cumpla que *grado* $g \geq K \cdot$ *grado* $f$.

**Solución al problema 7.**

(a) Supongamos que la factorización de $f(x)$ es $f(x) = c \cdot \prod_{j=1}^{s}(x-r_j) \cdot \prod_{j=1}^{t}((x-\omega_j)(x-\overline{\omega_j}))$ en donde las raíces reales son $r_j \leq 0$ $(j = 1, 2, ..., s)$ y las parejas de raíces complejas conjugadas son $(\omega_j, \overline{\omega_j})$ $(j = 1, 2, ..., t)$.

Como $f$ no tiene raíces reales positivas, los factores $x - r_j$ tienen coeficientes no negativos.

Para cada pareja $(\omega_j, \overline{\omega_j})$ de raíces complejas sea $\alpha_j = \left\lceil \frac{\pi/2}{|arg\ \omega_j|} \right\rceil$; o sea, $\alpha_j$ es el primer entero positivo con $\mathrm{Re}\omega_j^{\alpha_j} \leq 0$. Por la hipótesis tenemos $|arg\ \omega_j| \geq \frac{\pi}{2K}$, luego $\alpha_j \leq K$. Note que el polinomio $(x-\omega_j)(x-\overline{\omega_j})$ divide a

$$(x^{\alpha_j} - \omega_j^{\alpha_j})(x^{\alpha_j} - \overline{\omega_j}^{\alpha_j}) = x^{2\alpha_j} - \left(2\mathrm{Re}\omega_j^{\alpha_j}\right) x^{\alpha_j} + 1 = x^{2\alpha_j} + \left|2\mathrm{Re}\omega_j^{\alpha_j}\right| x^{\alpha_j} + 1.$$

Luego el polinomio

$$g(x) = \prod_{j=1}^{s}(x-r_j) \cdot \prod_{j=1}^{t} \left((x^{\alpha_j} - \omega_j^{\alpha_j})(x^{\alpha_j} - \overline{\omega_j}^{\alpha_j})\right)^{\alpha_j}$$

es un multiplo de $f(x)$, es el producto de polinomios, solamente, con coeficientes no negativos y dado que $\alpha_j \leq K$, tienen grado a lo más $K \cdot degf$.

(b) Sea

$$f(x) = x^2 - \left(2cos\frac{\pi}{2K}\right) x + 1 = (x - e^{\frac{i\pi}{2K}})(x - e^{-\frac{i\pi}{2K}}).$$

Demostraremos que el polinomio cumple las propiedades buscadas.

Supongamos lo contrario, es decir, existe un polinomio $g(x)$ diferente de cero tal que $g(x)$ es divisible entre $f(x)$, su grado es menor que $2K$ y sus coeficientes son todos no negativos.

Sea $g(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2K-1}x^{2K-1}$, tal polinomio.

Como $g(x)$ es divisible entre $f(x)$, tenemos que $g(e^{\frac{i\pi}{2K}}) = g(e^{-\frac{i\pi}{2K}}) = 0$. Entonces

$$0 = Im(g(e^{\frac{i\pi}{2K}}) \cdot e^{\frac{i\pi}{4K}}) = \sum_{j=0}^{2K-1} a_j \sin\frac{(2j+1)\pi}{4K}.$$

Pero en el lado derecho los valores de seno son estrictamente positivos, y los coeficientes son no negativos y no todos son cero. Contradicción.

**Criterio de calificación del problema 7.**

Para la parte $(a)$ **(4 puntos)**

Dar la forma del polinomio $f(x)$ caracterizando sus raíces complejas ($\alpha_j$ es el primer entero positivo con $\mathrm{Re}\omega_j^{\alpha_j} \leq 0$ y $\alpha_j \leq K$) **(2 puntos)**

Construir el polinomio $g(x)$ **(2 puntos)**

Para la parte $(b)$ **(3 puntos)**

Por proponer un polinomio bueno **(1 punto)**

Construir el polinomio $g(x)$ **(2 puntos)**